1021. Regular vector lattice ニツイテ

小笠原 藤次郎（広島文理大）

積分論其ノ他ヘノ應用ヲ顧慮シテ regular vector lattice ニ関スル二三ノ事実ニツイテ述ベタイ。

§1. 定理1. Bochner ノ條件[1]（次ニ示ス（α））ヲ

(1) S. Bochner, Proc. Nat. Acad. Sci. 26 (1940) 29–31

満足スル vector lattice ハ regular (型 K_6 ノ)[2] デアル。

(α) (o)ー連続正線型汎函数列 $f_n(x)$ が存在シ任意ノ正ノ単調列 $x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots\cdots$ ニ對シ各々ノ n ニツイテ $f_n(x_m)$ が有界ノトキ $\vee x_m$ が存在スル。

(証) (α) ヲ満足スル vector lattice ヲ X トスレバ (α) カラ X ハ σ-complete デアル。今 $\rho(x)$ トシテ

$$\rho(x) = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{f(|x|)}{1+f(|x|)}$$

ト置クトキ

(i) $\rho(x) \geqq 0$, $x=0$ ノトキニ限リ $\rho(x)=0$

(ii) $\rho(x+y) \leqq \rho(x)+\rho(y)$

(iii) $|x|<|y|$ ノトキ $\rho(x)<\rho(y)$

(iv) $x_n \downarrow 0$ ノトキ $\rho(x_n) \to 0$

(v) $x_n > 0$, $x_n \uparrow \infty$ ノトキ

$$\lim_{n\to+\infty} \lim_{p\to\infty} \rho(x_{n+p}-x_n) > 0,$$

$$\lim_{\lambda\to 0} \lim_{n\to\infty} \rho(\lambda x_n) > 0$$

コレカラ X ハ型 K_6 ノ regular ナルコトヲ知ル。[3]

<u>例</u>. 數列空間 (s) ハ (α) ヲ満足スル。$f_n(x)$ トシテ x ノ n 番目ノ成分ヲ表ス數トスレバヨイ。Bochner[4] ハ L_p

---

(2) L Kantorovitch, Recueil Math. 7(1940) 211.

(3) L Kantorovitch, Recueil Math. 2(1937) 121-168.

(4) S. Bochner, 上掲

空間ハ(ム)ヲ満足スルト述ベテヰルガ此ハ正シクナイ。

次ニXヲ regular vector lattice トシテ normal ideal ノ作ル complete Boolean algebra ノ表現 Boole 空間[5]ヲ Ω トスル．簡単ノタメXガ単位 e ヲ有スル場合ヲ考ヘル．Ω 上非稠密点ヲ除イテ有限値ヲトル連続函数全体 $\mathcal{L}_\Omega$ ハ complete vector lattice ヲ作ルコトハ既ニ分ッテヰルガXガ regular ノトキ次ノ定理が成立スル。

<u>定理2</u>. Xガ単位 e ヲ有スル型 K_6 ノ regular vector lattice ナラバ $\mathcal{L}_\Omega$ ハ型 K_6 ノ regular vector lattice デアル。

(証) 定理1ノ証明中ノ $\rho(x)$ ニ当ルモノヲ作レバコノ場合ト同様ノ過程ニヨッテ証明サレル。

$x \in \mathcal{L}_\Omega$ ニ對シテ $\rho(x)=\frac{|x|}{1+|x|}$ ト置ケバヨイ．

$\rho(x) \in X$ デアル Ω ニXヲ値域トスル測度 $\mu(E)$ ノ導入ニヨリ

$$\rho(x)=\int_\Omega \frac{|f_x(\mathfrak{p}^*)|}{1+|f_x(\mathfrak{p}^*)|}\mu|dt|$$

ト書クコトが出来ル．コレニ依ッテS空間ノ場合ト同様ニ証明出来ルワケデアル．

<u>例</u>. $X=M$ トスレバ $\mathcal{L}_\Omega=S$ ヲ，$X=(l)$ トスレバ $\mathcal{L}_\Omega=(s)$ ヲ示シテヰル．後ノ例ノ如ク e ヲ $e_i>0$ ニ分

---

(5) 紙上数学談話會 998, 999．コノ中記法及ビ定義ニ從フ。

ケ $e = \vee e_i$, $e_i \wedge e_j = 0$ $(i \neq j)$, e_i ニ對スル Ω_i (上ノ例デハ一点カラナル) ヲ作ッテ $\mathcal{L}_{\Omega_i}$ ノ直和 ($\mathcal{L}_\Omega$ ニナル) ヲ論ズル方ガ便利ノ場合ガアル。

<u>定理3.</u> 定理2ノ假定ノ下ニ次ノ二ツノ命題ハ互ニ對等デアル。

(i) $x_n \in X$ ガ $x \in X = \mathcal{L}_\Omega$ デ (0) 一收斂スル。

(ii) $x_n \in X$ ガ任意ノ主 ideal (X 内ノ) ガ與ヘラレタトキ空デナイ部分主 ideal ガ存在シテコヽニ於ケル x_n ノ成分ガ x ノソレニ (0) 一收斂スル。

(注) x_n ガ (0) 一有界ノトキ (i), (ii) ハ何レモ (0) 一收斂ヲ表ス、(コレハ σ-complete ノ場合デモ成立スルコトデハアルガ)

(証) 定理2カラ、$\mathcal{L}_\Omega$ ノ regular ヲ利用シテ

コノ定理カラ X ニ新シイ收斂ノ型ガアルコトガ分ル. 上例デ函數空間 L ニツイテ云ヘバ L ノ函數列ガ殆ンド總テノ点デ L ノ函數ニ收斂スルコトデアリ、今迄ハ論ゼラレナカッタモノデアル。

<u>定義</u> x_n, x ガ定理3ノ (ii) ヲ滿足スルトキ x_n ハ x ニ廣義ノ (0) 一收斂ヲスルトイフ。

コノ概念ノ使用ニツイテハ別ノ機會ニ述ベル。

§2. 定理2ニ於テ $P(x)$ ガ vector 値ヲトルモノニ出會ッタ. 此デ同ジヤウナ考ヘ方ニ從ッテ

<u>定理4.</u> X ヲ vector lattice トシ任意ノ $x \in X$ ニ K_6^- (non-proper axiom ヲ滿足スル)[6] 型ノ

regular vector lattice ノ正要素 $|x|$ ガ斯應シ次ノ條件ヲ満足スルトキ X モマタ K_6^- (non-proper axiom ヲ満足スル) 型ノ regular vector lattice デアル。

(1) $|x| \geqq 0$, $x=0$ ノトキニ限リ $|x|=0$

(2) $|x+y| \leqq |x|+|y|$ $|\lambda x| = |\lambda||x|$

(3) $|x|<|y|$ ノトキ $|x|<|y|$

(4) $x_n \downarrow 0$ ノトキ $|x_n| \downarrow 0$

(5) $0 < x_n \leqq x_{n+1}$, $|x_n|$ ガ (o) − 有界ノトキ $\vee x_n$ ガ存在スル。

(証) 実数デ norm ガ定義サレタ場合ト同様デアル。

次ノ X ヲ K_6^- (K_6) 型ノ或ハ non-proper axiom ヲ満足スル regular vector lattice トシ表現 $\mathcal{L}\Omega$ ニヨリ $|x|^p$ $0<p<+\infty$ ヲ定義スルトキ $|x|^p \in X$ ナル如キ x ノ全体ヲ X^p トスレバ ($x \in X$ ナルコトハ要求シナイ、例ヘバ (l) 空間ノ場合ヲ考ヘレバ分ル) 次ノ定理ガ成立スル。

<u>定理</u>. X ガ regular ノトキ X^p ハ同ジ型ノ regular vector lattice デアル。

(証) 略。

---

(6) L. Kantorovitch, (3) ニ掲ゲタ論文. コノトキ K_6 型ニナルコトガ示サレテキル。